

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Construction Mécanique | MECANIQUE APPLIQUEE | L.P. AULNOYE |
| COURS | CINEMATIQUE : GENERALITES Position - Trajectoire - Mouvement | Page 1/5 |

1. Introduction

Définition :

La cinématique est la partie de la mécanique qui permet d'étudier et de décrire les mouvements des corps, indépendamment des causes qui les produisent.

Grandeurs étudiées :

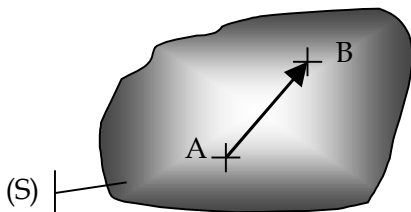
Position Trajectoire Vitesse Accélération

Exemples :

- Usinage : trajectoire d'un outil, vitesse d'avance ;
- Dimensionnement d'une pompe : cylindrée, débit ;
- Astrophysique : trajectoires et orbites des satellites ...

2. Hypothèse

On considère que les solides sont indéformables.

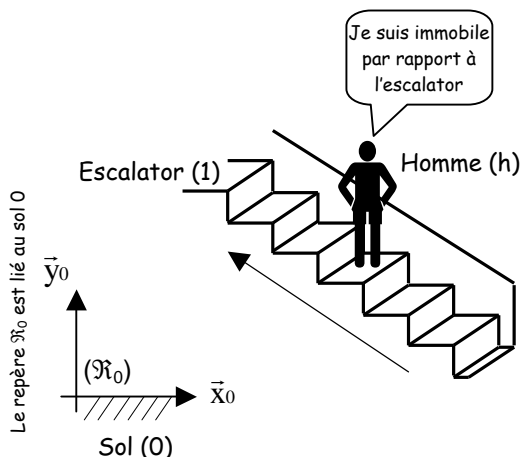


Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B appartenant à (S) la distance AB reste constante au cours du temps.

$$\forall A \text{ et } B \in (S), \forall t, \|\overline{AB}\| = \text{constante}$$

3. Référentiel (Solide de référence)

Exemple : Individu sur un escalator.



Il est indispensable en cinématique de préciser le solide de référence par rapport auquel on définit le mouvement étudié.

L'homme est *mobile* dans le repère \mathcal{R}_0 , mais *immobile* par rapport à l'escalator.

- Le mouvement de l'homme (h) par rapport au sol (0) est noté $M_{h/0}^t$:
 - 0 est le solide **de référence**,
 - h est le solide **étudié**.

L'observateur dans ce cas se trouve **sur le sol** et voit l'homme **mobile** par rapport à lui.

- Le mouvement de l'homme (h) par rapport à l'escalator (1) est noté $M_{h/1}^t$:
 - 1 est alors le solide **de référence**.
 - h est le solide **étudié**.

L'observateur dans ce cas se trouve **sur l'escalator** et voit l'homme **immobile** par rapport à lui.

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Construction Mécanique | MECANIQUE APPLIQUEE | L.P. AULNOYE |
| COURS | CINEMATIQUE : GENERALITES Position - Trajectoire - Mouvement | Page 2/5 |

4. Référentiel absolu ou relatif

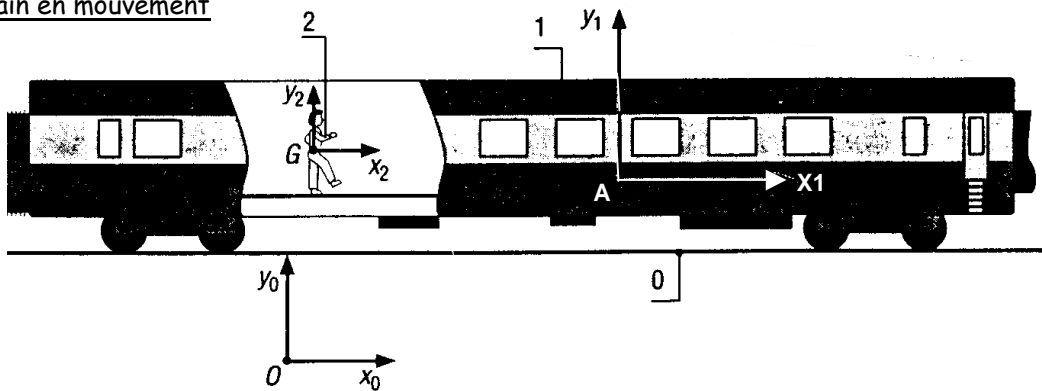
Un mouvement est dit absolu s'il est décrit par rapport à un référentiel absolu (au repos absolu).

La terre peut-être assimilée avec une très bonne approximation à un référentiel absolu.

Un mouvement est relatif s'il est décrit par rapport à un référentiel en mouvement (référentiel relatif).

Les repères liés à un référentiel absolu ou relatif sont appelés repère absolu ou repère relatif.

Exemple : train en mouvement



$R_0 = (O; \vec{X}_0; \vec{Y}_0; \vec{Z}_0)$, le repère lié à la terre est un repère absolu.

$R_1 = (A; \vec{X}_1; \vec{Y}_1; \vec{Z}_1)$, le repère lié au train est un repère relatif.

$R_2 = (G; \vec{X}_2; \vec{Y}_2; \vec{Z}_2)$, le repère lié au voyageur est un repère relatif.

Le mouvement du wagon 1 par rapport à la terre 0 noté $M_{1/0}^{vt}$ est un mouvement absolu car il est décrit par rapport au repère R_0 lié à la terre qui est un repère fixe.

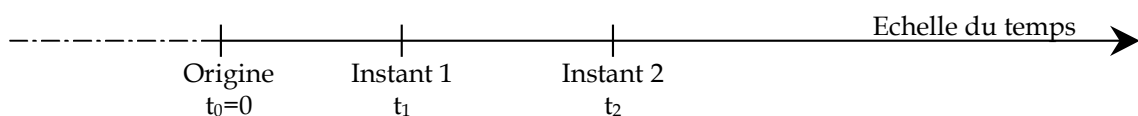
Le mouvement du voyageur 2 par rapport à la terre 0 noté $M_{2/0}^{vt}$ est un mouvement absolu car il est lui aussi décrit par rapport au repère R_0 lié à la terre qui est un repère fixe.

Le mouvement du voyageur 2 par rapport au wagon 1 noté $M_{2/1}^{vt}$ est un mouvement relatif car il est défini par rapport au repère R_1 qui est un repère mobile.

5. Repère de temps

Quelle que soit l'étude cinématique, on a toujours besoin de se situer dans le temps. On appelle *instant t* le temps écoulé depuis une origine des temps $t_0=0$, choisie arbitrairement.

L'unité de mesure du temps est la seconde, notée s.



$\Delta t = t_2 - t_1$ est appelée durée entre les deux instants t_1 et t_2 .

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Construction Mécanique | MECANIQUE APPLIQUEE | L.P. AULNOYE |
| COURS | CINEMATIQUE : GENERALITES Position - Trajectoire - Mouvement | Page 3/5 |

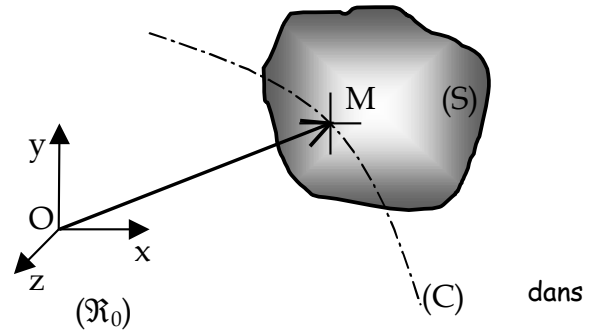
6. Vecteur position

Il nous faut être en mesure, à tout instant, de définir la position de n'importe quel point du solide dans l'espace. A cette fin, on utilise un **vecteur position**.

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Soit M un point appartenant au solide (S) de coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ à l'instant t.

Au cours de ce mouvement, le point M décrit dans le repère \mathcal{R}_0 une courbe (C) appelée **trajectoire** du point $M \in S$ dans le repère \mathcal{R}_0 .



Le vecteur position du point M de (S), dans le repère \mathcal{R}_0 , à l'instant t, est le vecteur $\vec{OM}(t)$ où O est l'origine du repère \mathcal{R}_0 .

$$\vec{OM}(t) = \text{vecteur position.}$$

| | |
|--|--|
| $\vec{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0 + z(t) \cdot \vec{z}_0$ | $\vec{OM}(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ |
|--|--|

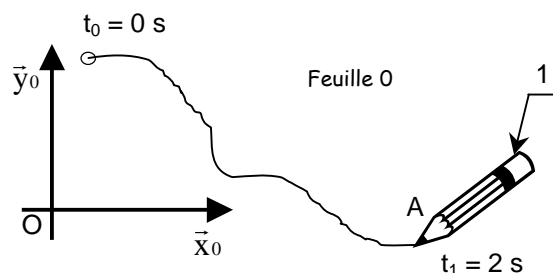
7. Trajectoire

On appelle **trajectoire du point (M)** d'un solide (S) l'ensemble des positions occupées successivement par ce point, au cours du temps, au cours de son déplacement par rapport à un référentiel donné.

En représentant graphiquement dans un repère la courbe correspondant aux équations $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du vecteur position $\vec{OM}(t)$, on obtient la trajectoire du pt M.

Notation : $T_{M \in S/R}$ = trajectoire du point M appartenant à S, par rapport au repère R.

Exemple 1 :



La trajectoire $T_{A \in 1/0}$ correspond au trait tracé par le stylo.

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Construction Mécanique | MECANIQUE APPLIQUEE | L.P. AULNOYE |
| COURS | CINEMATIQUE : GENERALITES Position - Trajectoire - Mouvement | Page 4/5 |

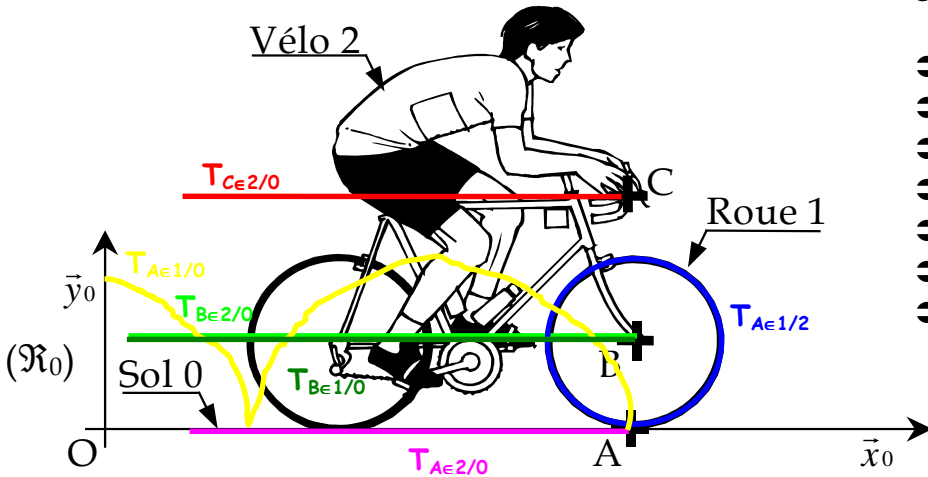
Exemple 2 :

Soit une bicyclette en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 considéré comme un repère fixe.

Soit A le point de contact entre la roue 1 et le sol O.

Soit B le centre de l'articulation entre la roue 1 et le cadre 2.

Soit C un point appartenant à une poignée de frein.



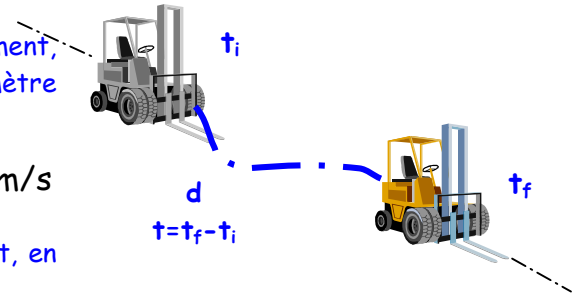
Déterminer et tracer les trajectoires suivantes :

- ⊙ $T_{C\in 2/0}$: *segment de droite // (0, x₀).*
- ⊙ $T_{B\in 2/0}$: *segment de droite // (0, x₀).*
- ⊙ $T_{A\in 2/0}$: *segment de droite (A, x₀).*
- ⊙ $T_{B\in 1/2}$: *point.*
- ⊙ $T_{A\in 1/2}$: *Cercle de centre B et de rayon AB.*
- ⊙ $T_{B\in 1/0}$: *segment de droite // (0, x₀).*
- ⊙ $T_{A\in 1/0}$: *Cycloïde.*

8. Vecteur Vitesse

Vitesse moyenne: La vitesse mesure une variation de déplacement, elle est le rapport d'une distance sur un temps, et s'exprime en mètre par seconde (m/s).

$$V = \frac{d}{t_f - t_i} = \frac{d}{t} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps pour parcourir cette distance}} \quad \text{m/s}$$



La vitesse moyenne ne décrit pas complètement un mouvement, en effet, elle ne prend pas en compte les arrêts, retours en arrière, ...

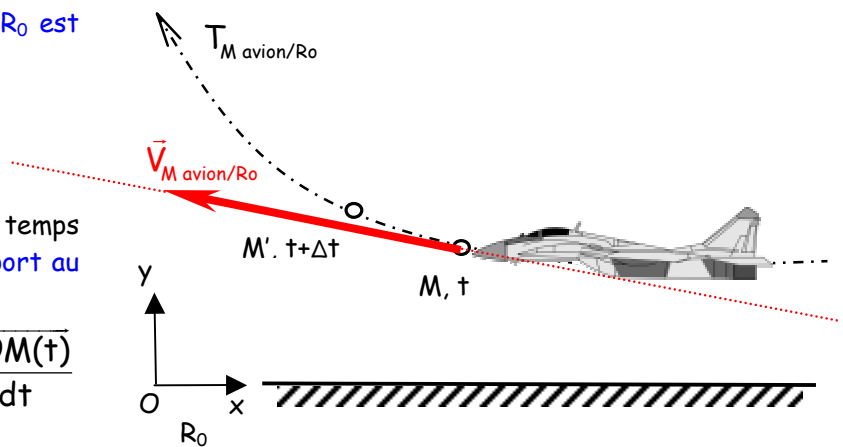
Vitesse instantanée:

La vitesse instantanée de l'avion au point M / R_0 est modélisée par l'outil mathématique vecteur.

Elle s'écrit $\vec{V}_{M \text{ avion}/R_0}$

Elle s'obtient en faisant tendre l'intervalle de temps Δt vers zéro, c'est-à-dire en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\vec{OM}(t)$.

$$\vec{V}_{M \text{ avion}/R_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{MM}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta OM}}{\Delta t} = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$$



Caractéristiques de ce vecteur vitesse:

- | | | |
|---|-----------------------|--|
| } | Point d'application : | M |
| | Direction : | Tangente à la trajectoire |
| | Sens : | Celui du mouvement |
| | Norme : | $\ \vec{V}_{M \text{ avion}/R_0}\ = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ |

| | | |
|------------------------|---|--------------|
| Construction Mécanique | MECANIQUE APPLIQUEE | L.P. AULNOYE |
| COURS | CINEMATIQUE : GENERALITES Position - Trajectoire - Mouvement | Page 5/5 |

9. Vecteur accélération

L'accélération mesure une variation de vitesse pendant un intervalle de temps.

Pour reprendre l'exemple précédent, elle se note : $\vec{a}_{M \text{ avion}/R_0}$, et son unité est le m/s^2 (m/s par seconde).

L'accélération est obtenue par dérivation par rapport au temps de la vitesse, c'est donc la dérivée seconde de la position.

$$\vec{a}_{M \text{ avion}/R_0} = \frac{d\vec{V}_{M \text{ avion}/R_0}}{dt} = \frac{d^2\overline{OM}(t)}{dt^2}$$

10. Mouvements particuliers de solides

| Famille de mouvement | Mouvement particulier | Exemple | Définition |
|----------------------|------------------------|---------|--|
| Translation | Translation quelconque | | Un solide est en translation dans un repère R si n'importe quel bipoint (AB) du solide reste parallèle à sa position initiale au cours du mouvement. |
| | Translation rectiligne | | Tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles entre elles. |
| | Translation circulaire | | Tous les points du solide se déplacent suivant des cercles de même rayon. |
| Rotation | | | Tous les points du solide décrivent des cercles concentriques centrés sur l'axe du mouvement. |
| Mouvement plan | | | Tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles entre eux. |